

Concours en Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : Jeudi 10 juin 2004

Heure : 8 H

Durée : 4 H

Nb pages : 8

Barème : Pb1: 7 pts (I/1,5; II/2,5; III/3)

Pb2: 13 pts (I/5,5; II/4,5; III/3)

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants. Chaque problème comporte des parties indépendantes. Le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions.

PROBLEME1 : CONDUCTION ET RAYONNEMENT THERMIQUES

I- Régime permanent

Une barre homogène, indéformable, de conductivité thermique constante λ , de section uniforme A et de longueur d est en contact thermique à son extrémité $y = 0$ à une paroi P_1 de température constante T_1 et à son extrémité $y = d$ à une paroi P_2 de température constante $T_2 < T_1$ (figure 1). La surface latérale de la barre est parfaitement adiabatique.

Dans toute cette partie, seul le transfert thermique par conduction, régi par la loi de Fourier, est à considérer.

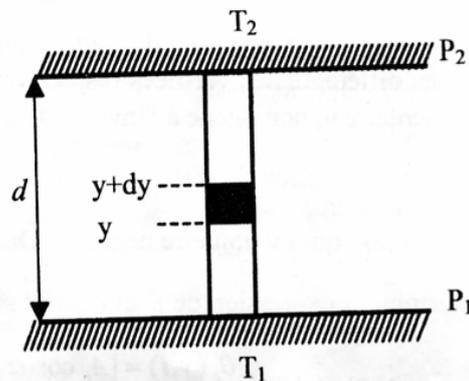


Figure 1

On cherche à évaluer, en régime permanent, l'entropie créée par unité de volume et par unité de temps.

1) En faisant un bilan d'énergie sur une tranche de la barre de longueur dy , comprise entre les abscisses y et $y+dy$, établir l'équation de la chaleur en régime permanent.

En déduire la température $T(y)$ en un point d'abscisse y de la barre.

2.a) En faisant un bilan entropique sur la tranche de longueur dy , déterminer l'entropie d'échange δS_e de cette tranche.

2.b) Dire pourquoi la conduction s'accompagne d'une création d'entropie δS_c .

2.c) En déduire l'entropie créée par unité de volume et par unité de temps $\dot{S}_{v,c}$.

2.d) Pour quelle température l'entropie $\dot{S}_{v,c}$ est maximale. Ce résultat était-il prévisible? Justifier.

II. Régime variable

On se propose d'étudier la diffusion de l'énergie thermique au sein d'une plaque homogène d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ . On admet que λ , c et ρ sont constantes, uniformes et indépendantes de la température. Les deux plans $\Pi_1(y=0)$ et $\Pi_2(y=-e)$ délimitant la plaque sont de très grandes dimensions devant e (figure 2).

Les deux parois métalliques P_1 et P_2 sont maintenant toutes les deux maintenues à une même température constante T_e et sont distantes de $d > e$.

Le plan Π_2 de la plaque est en contact thermique avec P_1 et le plan Π_1 est à la distance $d-e$ de P_2 (figure 2).

La température initiale de la plaque est supposée uniforme et inférieure à T_e . A un instant t , la température en un point de la plaque est T . On pose $\theta = T - T_e$.

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(y,t)$ et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Donner l'expression de a en fonction de ρ , c et λ .

2) On cherche une solution de cette équation de la forme $\theta(y,t) = f(y).g(t)$. Etablir les équations différentielles vérifiées respectivement par $f(y)$ et $g(t)$. On introduira une constante supplémentaire ν , homogène à l'inverse d'un temps.

3) Donner l'expression de $g(t)$.

Expliquer pourquoi ν doit être négative. Dans la suite, on pose $\nu = -k^2$ (k réel).

4) Déterminer l'expression de θ et l'écrire sous la forme :

$$\theta_k(y,t) = [A_k \cos(\alpha y) + B_k \sin(\alpha y)] \exp(\beta t)$$

Donner l'expression de α et celle de β . Une relation entre A_k et B_k sera déterminée par la suite.

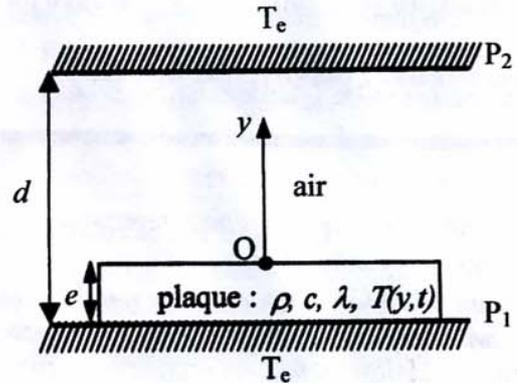


Figure 2

Déterminer l'expression du flux surfacique de puissance $J_Q(\Pi_1)$ à travers Π_1 .

5) Un dispositif mécanique (ventilateur par exemple) met en mouvement l'air au dessus de la plaque de sorte que l'on puisse supposer la température instantanée de l'air égale à T_e . On désignera par T_l la température de la plaque à la surface Π_1 .

Le flux surfacique de puissance à travers la partie supérieure de la plaque (plan Π_1), s'écrit sous la forme générale : $J_{Qa} = h(T_l - T_e)$ avec $h > 0$.

Quel est le sens physique de l'égalité entre $J_Q(\Pi_1)$ et J_{Qa} ?

En déduire une relation entre A_k et B_k et donner l'expression de $\theta_k(y,t)$ en fonction de A_k , a , k , h et λ .

6) Déduire de la condition imposée à la température T au niveau du plan Π_2 une relation entre k , e , a , λ et h . Proposer une méthode de résolution, autre que numérique, permettant de déterminer les différentes valeurs de k .

III- Bilan radiatif : écran thermique

Deux parois planes parallèles P_1 et P_2 , de grandes surfaces, sont maintenues respectivement aux températures constantes $T_1 = 283$ K et $T_2 = 273$ K. P_1 et P_2 définissent une enceinte vide dans laquelle on place une feuille d'aluminium (appelée écran) de surface A parallèle aux parois et qui la divise en deux parties. Cet écran homogène, d'épaisseur $e = 1$ mm, de chaleur massique $c = 910$ J.K⁻¹.kg⁻¹, de masse volumique $\rho = 2700$ kg.m⁻³, est initialement à la température T_0 .

Dans toute cette partie, seul le transfert thermique par rayonnement est à considérer. On suppose de plus que P_1 , P_2 et l'écran se comportent comme des corps noirs.

On donne la constante de Stefan $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴.

1.a) Rappeler la loi de Stefan.

1.b) Exprimer la puissance reçue par l'écran P_a et la puissance qu'il rayonne par ses deux faces P_r .

1.c) En déduire la valeur de la température d'équilibre T_e de l'écran d'aluminium.

1.d) Dans quel domaine la densité d'énergie rayonnée par l'écran, portée à T_e , est maximale? Justifier votre réponse.

2) A un instant t , la température en un point de l'écran est $T(t)$.

2.a) Déterminer l'énergie nette δQ_1 reçue (emmagasinée) par la face (1) de l'écran en regard avec P_1 pendant la durée dt .

2.b) Les températures T_1 de P_1 et T de la face (1) de l'écran sont voisines, on peut donc linéariser les échanges thermiques.

Montrer que cette énergie s'écrit sous la forme: $\delta Q_1 = \gamma_1 (T_1 - T) dt$, où γ_1 est un coefficient de proportionnalité à exprimer en fonction de T_1 , A et σ .

2.c) En faisant le même raisonnement pour la face (2) de l'écran, déduire que l'énergie nette reçue pendant dt par cette face s'écrit sous la forme: $\delta Q_2 = \gamma_2 (T_2 - T) dt$.

Dans la suite on prendra $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$.

2.d) En déduire l'énergie nette δQ reçue par l'écran pendant la durée dt , en fonction de γ , T_1 , T_2 et T .

2.e) En faisant un bilan thermique de l'écran pendant l'intervalle de temps dt , déterminer l'équation différentielle donnant la température T de l'écran en fonction du temps.

En déduire la loi de variation de la température de l'écran et exprimer sa constante de temps τ en fonction de ρ , e , c , σ et T_1 . Calculer τ .

2.f) Déterminer la valeur de la température finale T_f de l'écran après une heure. Que peut-on dire de la validité des approximations utilisées ? Justifier votre réponse.

3) Imaginons que l'on puisse placer entre les parois P_1 et P_2 d'autres écrans parallèles au premier. Quelle sera la conséquence sur le transfert thermique entre P_1 et P_2 . Justifier.

PROBLEME2 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES

On rapporte l'espace à un système d'axes (Ox, Oy, Oz) de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le milieu vide de charge et de courant est caractérisé par sa permittivité électrique ϵ_0 et sa perméabilité magnétique μ_0 . La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$.

On définit pour chaque plan matériel, le coefficient de réflexion en puissance (ou en énergie) R et le coefficient de transmission en puissance (ou en énergie) T par :

$$R = \frac{\text{Puissance réfléchie}}{\text{Puissance incidente}}, \quad T = \frac{\text{Puissance transmise}}{\text{Puissance incidente}}$$

On néglige la fraction d'énergie absorbée par les plans matériels. La conservation de l'énergie impose alors $R+T=1$

On rappelle que $\overline{\text{rot}(\text{rot}\vec{G})} = \overline{\text{grad}(\text{div}\vec{G})} - \overline{\Delta}\vec{G}$, où $\overline{\Delta}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.

Pour x très faible $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

I- Ondes guidées entre deux conducteurs parfaits

On se propose d'étudier la propagation guidée des ondes électromagnétiques entre deux plans conducteurs supposés parfaits parallèles au plan Oxz distants de d . Le milieu intérieur est un milieu vide de charge et de courant.

Une onde électromagnétique incidente plane, monochromatique de longueur d'onde λ_0 , de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant Ox , arrive sur le conducteur en $y=0$ avec une incidence faisant un angle α avec l'axe des y et donne naissance à une onde réfléchie supposée de même polarisation que l'onde incidente (figure 1).

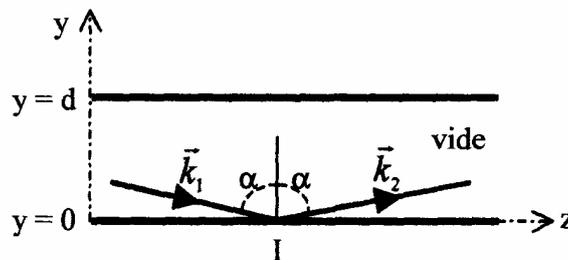


Figure 1

L'onde résultante en un point intérieur au guide sera donc la superposition de l'onde incidente de champ électrique \vec{E}_1 et de l'onde réfléchie de champ électrique \vec{E}_2 .

En représentation complexe les champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 s'écrivent:

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \vec{u}_x \quad \vec{E}_2 = E_{02} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \vec{u}_x$$

\vec{k}_1 et \vec{k}_2 sont les vecteurs d'onde de l'onde incidente et de l'onde réfléchie respectivement ; E_{01} et E_{02} sont des réels.

1.a) Etablir l'équation de propagation de l'onde dans le vide.

Que vaut le module de \vec{k}_1 et celui de \vec{k}_2 ? On le notera par k_0 .

1.b) Ecrire les composantes des vecteurs d'onde incident \vec{k}_1 et réfléchi \vec{k}_2 en fonction de k_0 et α .

1.c) Déterminer l'expression du champ électrique résultant \vec{E} .

On note par k_g la quantité $k_0 \sin \alpha$ et par β la quantité $k_0 \cos \alpha$. Que représente k_g ? Justifier.

1.d) Rappeler les conditions aux limites vérifiées par le champ \vec{E} .

Déterminer l'amplitude E_{02} en fonction de E_{01} et trouver une condition sur β pour qu'une telle onde puisse exister dans le guide.

1.e) En utilisant l'équation de propagation vérifiée par \vec{E} , déterminer la relation de dispersion de l'onde dans le guide en fonction de d , λ_0 , λ_g et n , où n est un entier et $\lambda_g = 2\pi/k_g$.

1.f) Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_{cn} en dessous de laquelle il n'y a plus de propagation dans le guide.

1.g) Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g en fonction de c , f_{cn} et la fréquence $f = \omega/2\pi$. Quelle relation existe entre v_ϕ et v_g ? Le guide est-il dispersif? Justifier.

2.a) Déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} associé au champ électrique \vec{E} . Caractériser l'onde résultante.

2.b) Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$. En déduire la puissance moyenne P transmise par une section droite du guide d'onde de longueur ℓ parallèlement à Ox et de largeur d parallèlement à Oy en fonction de E_{01} , ℓ , d , μ_0 et v_ϕ .

2.c) Montrer que la moyenne temporelle de la densité volumique de l'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ s'écrit sous la forme :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{E_{01}^2}{\mu_0} \left[\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_g}{\omega} \right)^2 \cos(2\beta y) \right]$$

2.d) En faisant un bilan énergétique et en utilisant les résultats précédents, déterminer la vitesse de propagation de l'énergie v_e . Conclure.

2.e) Si les parois du guide étaient de conductivité électrique finie, quelle en est la conséquence la plus importante?

3) On se propose dans cette question de retrouver d'une autre manière, la relation de dispersion dans le guide.

Un rayon incident arrive sur le plan $y = 0$ en I et donne naissance à un rayon réfléchi IJ (figure 2). AFP et IQ sont les intersections de deux plans d'onde de l'onde incidente et du plan (yOz) ; de même, DJQ et IP sont les intersections de deux plans d'onde de l'onde réfléchie et du plan (yOz) .

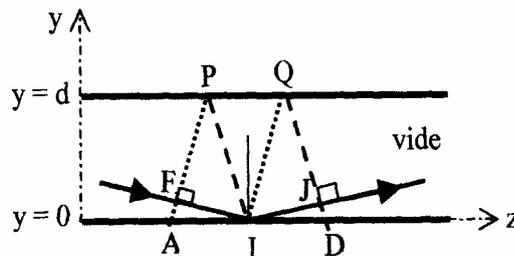


Figure 2

3.a) Expliquer pourquoi le déphasage dû à la différence de marche géométrique entre l'onde incidente et l'onde réfléchie en un point du plan conducteur ($y = d$) est $\Delta\varphi = 2n\pi$, où n est un entier.

3.b) Déterminer les distances FI et IJ en fonction de λ_0 et n .

3.c) Déterminer l'expression de FI en fonction de α et d . En déduire une relation entre d , α , n et λ_0 . Que représente la distance IA/n ? Retrouver la relation de dispersion de l'onde dans le guide.

II- Cavité résonante

Les deux plans conducteurs étudiés précédemment ($y = 0$ et $y = d$) sont désormais réels et définissent une cavité.

Une onde incidente plane progressive monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 , de pulsation ω polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x et de vecteur d'onde $\vec{k} = -k\vec{u}_y$, se propageant dans le vide, arrive en incidence normale sur le plan $y = d$ (figure 3). Son champ électrique \vec{E}_i a pour amplitude réelle E_0 .

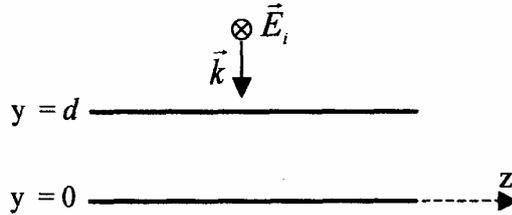


Figure 3

On s'intéresse à la détermination du champ électromagnétique dans l'espace compris entre les deux plans résultant des réflexions multiples sur les conducteurs. L'origine de phase de l'onde incidente avant la traversée de la cavité est prise au niveau du plan $y = d$.

La réflexion sur chaque conducteur entraîne un déphasage de π et une diminution de l'amplitude alors qu'une transmission entraîne uniquement une diminution de l'amplitude.

Les amplitudes E_{0t} et E_{0r} des champs électriques suite à la seule transmission par le plan $y = d$ et à la première réflexion dans la cavité sur le plan $y = 0$, s'écrivent alors :

$$E_{0t} = \sqrt{T} E_0, \quad E_{0r} = -\sqrt{R} E_{0t}$$

1) On s'intéresse tout d'abord aux réflexions se produisant sur $y = 0$ pour expliciter le champ électrique en un point M d'abscisse y ($0 < y < d$) :

1.a) Montrer que le champ électrique \vec{E}_1^+ résultant d'une première réflexion s'écrit en représentation complexe sous la forme :

$$\vec{E}_1^+ = -\sqrt{R}\sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t - ky)} e^{-ikd} \vec{u}_x$$

1.b) En déduire le champ électrique \vec{E}_{2n+1}^+ résultant de la n-ième réflexion.

2) On s'intéresse maintenant aux réflexions se produisant sur $y = d$ pour expliciter le champ électrique en un point M d'abscisse y ($0 < y < d$) :

2.a) Montrer que le champ électrique \vec{E}_2^- résultant d'une première réflexion s'écrit en représentation complexe sous la forme :

$$\vec{E}_2^- = R\sqrt{T} E_0 e^{i(\omega t + ky)} e^{-i3kd} \vec{u}_x$$

2.b) En déduire le champ électrique \vec{E}_{2n}^- résultant de la n-ième réflexion.

3) L'onde résultante en un point quelconque de la cavité est la superposition de deux ondes planes progressives se propageant en sens inverse. Le champ électrique résultant en un point M de la cavité est alors :

$$\vec{E} = \sum_{n=0}^{\infty} (\vec{E}_{2n}^- + \vec{E}_{2n+1}^+)$$

Montrer que ce champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \sqrt{T} \frac{e^{iky} - \sqrt{R} e^{-iky}}{1 - R e^{-2ikd}} e^{i(\omega t - kd)} \vec{u}_x$$

4) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ en un point quelconque de la cavité.

5.a) Déterminer, en un point M d'abscisse y ($0 < y < d$), la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$.

Indication. La moyenne temporelle d'un produit de deux fonctions sinusoïdales G et H de même fréquence s'exprime en notation complexe par $\langle GH \rangle = \frac{1}{2} \text{Réelle}(\underline{G} \underline{H}^*)$, où \underline{H}^* est le complexe conjugué de \underline{H} .

5.b) Montrer que la moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique totale $\langle U_{em} \rangle$ de la cavité de longueur d et de surface S , est de la forme :

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{1}{2} S d \epsilon_0 E_0^2 \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2kd)}$$

6) Déterminer les fréquences f_n , dites fréquences de résonance, pour lesquelles l'énergie de la cavité $\langle U_{em} \rangle$ passe par un maximum U_{max} que l'on déterminera. Que représentent les fréquences f_n si les conducteurs étaient parfaits?

7) L'onde électromagnétique incidente est de fréquence f voisine de f_n du mode n considéré.

7.a) Donner l'expression de $\langle U_{em} \rangle$ en fonction de ϵ_0 , E_0 , R , d , S , f et f_1 .

7.b) On pose $\Delta f = f - f_n$ et on suppose que $|\Delta f| \ll f_1$.

Donner l'expression approchée de $\langle U_{em} \rangle$ en développant le dénominateur au deuxième ordre en $\frac{\Delta f}{f_1}$. La mettre sous la forme :

$$\langle U_{em} \rangle = \frac{U_{max}}{1 + 4F^2 \left(\frac{\Delta f}{f_1} \right)^2}$$

où F est une fonction à expliciter en fonction de R .

7.c) Donner l'allure de $\langle U_{em} \rangle$ en fonction de Δf .

7.d) Déterminer l'étendue spectrale $\Delta \nu = 2|\Delta f_{1/2}|$ pour laquelle $\langle U_{em} \rangle$ vaut $\frac{U_{max}}{2}$.

Calculer F et $\frac{\Delta \nu}{f_1}$ pour $R = 0,9$; $R = 0,95$ et $R = 0,99$. Que peut-on conclure sur la répartition spectrale de l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité? Conclure sur une application.

III- Interférences à deux ondes

Les deux plans sont maintenant des lames de verre L_1 et L_2 d'épaisseurs négligeables distantes de d . Les faces en regard de L_1 et L_2 sont semi-réfléchissantes, c'est-à-dire qu'elles réfléchissent la fraction R de l'intensité incidente et transmettent la fraction T restante.

La lame d'air (L), ainsi constituée, est éclairée par une source étendue émettant des radiations de longueur d'onde λ_1 .

Un rayon incident R_0 arrive sur la lame, avec un angle d'incidence i faible. Cette lame fournit à partir du rayon R_0 une série de

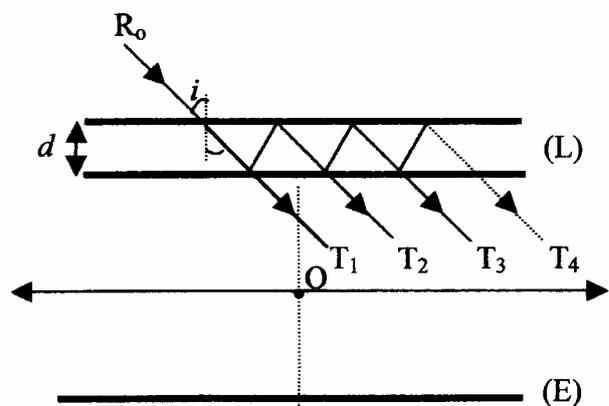


Figure 3

rayons réfléchis (non représentés) et une série de rayons transmis $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ (figure 3).
On s'intéresse à l'observation de la figure d'interférence par transmission.

Les rayons issus de (L) arrivent sur une lentille convergente de centre O, d'axe optique perpendiculaire à (L) et l'observation des phénomènes d'interférences se fait sur un écran (E) disposé dans le plan focal image de la lentille de distance focale image $OF = f$.

On donne $\lambda_1 = 533 \text{ nm}$ et $d = 5 \text{ mm}$.

1) En utilisant les définitions des coefficients de réflexion R et de transmission en puissance T définis au début du problème, montrer qu'on peut négliger les intensités I_3, I_4, \dots associées aux rayons T_3, T_4, \dots devant I_1 et I_2 associées aux rayons T_1 et T_2 .

On donne $R = 0,4$.

On étudiera dans la suite du problème un phénomène d'interférences à deux ondes associées aux rayons T_1 et T_2 .

2.a) Compléter la figure 3 en faisant apparaître le cheminement des rayons T_1 et T_2 jusqu'à l'écran (E).

2.b) Déterminer l'expression de la différence de marche δ entre les deux rayons transmis en fonction de d et i .

2.c) Expliquer pourquoi les franges d'interférence sont des anneaux. Qu'appelle-t-on ces anneaux? Justifier.

3) On désigne par φ le déphasage entre les rayons T_1 et T_2 qui interfèrent. L'intensité résultante est :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

Exprimer le contraste $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ en fonction de R .

Calculer le contraste C pour $R = 0,2$; $R = 0,3$ et $R = 0,4$. Conclure.

4.a) Quelle est la nature du centre de la figure d'interférence?

4.b) Déterminer, dans l'approximation de Gauss, l'expression du rayon ρ_k du k -ième anneau brillant.

4.c) Calculer la distance $\Delta\rho_k$ séparant le k -ième anneau brillant du $(k+1)$ -ième anneau brillant. Que devient $\Delta\rho_k$ pour k très grand. Peut-on définir une interfrange? Justifier.

5) La source émet en fait deux radiations de longueurs d'onde dans le vide $\lambda_1 = 533 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. On cherche à déterminer $\Delta\lambda$. On mesure, à l'aide d'un micromètre, la largeur $\Delta\ell_k$ du k -ième anneau brillant.

5.a) L'ordre d'interférence p_k étant fixé, montrer que la mesure de la largeur $\Delta\ell_k$ du k -ième anneau brillant permet d'accéder à la valeur de $\Delta\lambda$.

5.b) Pour k très grand, trouver une relation entre λ_1 , $\Delta\lambda$ et l'ordre d'interférence p_k pour qu'il n'y ait pas de chevauchement entre le k -ième et le $(k+1)$ -ième anneaux brillants.

Fin de l'épreuve